Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Lösungen 5

1. Der Radius R eines kugelförmigen Teilchens sei uniform verteilt auf dem Intervall $[10, 100]\mu m$, und V bezeichne das Volumen dieses Teilchens.

a) Berechne den Erwartungswert von V.

b) Berechne die Dichte von V.

Wir nehmen nun an, der Radius R sei *lognormal* verteilt (eine Zufallsvariable Y heisst lognormal verteilt, falls $\log Y$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist).

c) Zeige: Wenn R lognormal verteilt ist, dann ist auch V lognormal verteilt.

Lösung: Die Zufallsvariable R ist uniform auf dem Intervall $[10, 100]$ verteilt, d.h. $f_R(x) = \frac{1}{90}1_{[10,100]}(x)$. Das Volumen des Teilchens ist gegeben durch $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

a) Für den Erwartungswert von V und von V^2 hat man

$$E[V] = \frac{4\pi}{3}\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_R(x)dx = \frac{4\pi}{3}\int_{10}^{100} x^3 \frac{1}{90}dx = \frac{\pi}{270}(10^8 - 10^4) \approx 1\,163\,436$$

b) Die Verteilungsfunktion von V ist gegeben durch $F_V(x) = P[V \leq x] = P[4\pi R^3/3 \leq x] = F_R((\frac{3x}{4\pi})^{1/3})$. Durch Differenzieren folgt

$$\begin{aligned} f_V(x) &= \frac{d}{dx}F_V(x) = \frac{d}{dx}F_R\Big(\Big(\frac{3x}{4\pi}\Big)^{1/3}\Big) \\ &= f_R\Big(\Big(\frac{3x}{4\pi}\Big)^{1/3}\Big)\cdot\Big(\frac{3}{4\pi}\Big)^{1/3}\frac{1}{3}x^{-2/3} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{90}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}\frac{1}{3}x^{-2/3} & \text{falls } \frac{4\pi}{3}10^3 \leq x \leq \frac{4\pi}{3}10^6, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

c) $R \sim lognormal(\mu, \sigma^2)$ bedeutet, dass $\log R \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Weiter hat man

$$\log V = \log\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right) = \log\frac{4\pi}{3} + 3\log R.$$

Also $\log V \sim \mathcal{N}\Big(3\mu + \log\frac{4\pi}{3}, 9\sigma^2\Big)$, und somit $V \sim lognormal\Big(3\mu + \log\frac{4\pi}{3}, 9\sigma^2\Big)$.

2. Aufgrund langjähriger Untersuchungen ist bekannt, dass der Bleigehalt X in einer Bodenprobe annähernd normalverteilt ist. Ausserdem weiss man, dass der Erwartungswert 32 ppb (parts per billion) beträgt und dass die Standardabweichung 6 ppb beträgt.

a) Mache eine Skizze der Dichte von X und zeichne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe zwischen 26 und 38 ppb Blei enthält, in die Skizze ein.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 40 ppb Blei enthält?

Hinweis: Gehe zur standardisierten Zufallsvariablen Z über und benutze die Tabelle der Standardnormalverteilung.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 27 ppb Blei enthält?

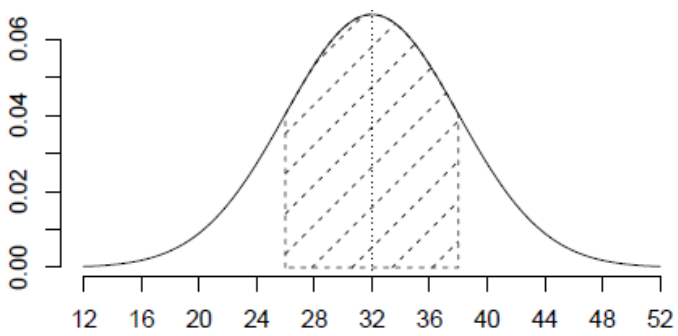
d) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.5% unterschritten? Das heisst, bestimme dasjenige c, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Bleigehalt kleiner oder gleich c ist, genau 97.5% beträgt.

e) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% unterschritten?

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die in Aufgabe a) eingezeichnet wurde?

Lösung:

a) Siehe Bild.



b) X bezeichne den Bleigehalt. Es gilt

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \qquad \text{mit } \mu = 32 \text{ und } \sigma^2 = 6^2.$$

Ohne Computer geht man aus praktischen Gründen (Tabelle!) normalerweise zur standardisierten Zufallsvariablen $Z = (X - \mu)/\sigma$ über. Es gilt $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, und

$$\mathbb{P}(X \leq 40) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{40 - 32}{6}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 1.33) = \Phi(1.33) = 0.9082.$$

c) $\mathbb{P}(X \leq 27) = \mathbb{P}(Z \leq -0.83) = \Phi(-0.83) = 1 - \Phi(0.83) = 0.2033.$

d) $\mathbb{P}(X \le c) = 0.975 = \mathbb{P}\left(Z \le \frac{c-32}{6}\right) = \Phi(\frac{c-32}{6})$.
Mit Hilfe der Tabelle findet man $\Phi(1.96) = 0.975$ (Bemerkung: 1.96 ist das 97.5%-Quantil der Standardnormalverteilung). Also muss gelten

$$\frac{c-32}{6} = 1.96 \text{ und deshalb } c = 32 + 1.96 \cdot 6 = 43.76.$$

e) Aus der Tabelle: $\Phi(1.28) = 0.9$ und $\Phi(-1.28) = 1 - 0.9 = 0.1$. Somit $c = 32 - 1.28 \cdot 6 = 24.31$.

f)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(26 \le X \le 38) = \mathbb{P}\left(\frac{26-32}{6} \le Z \le \frac{38-32}{6}\right) &= \mathbb{P}(-1 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826.\end{aligned}$$

3. **a)** Sei X eine $Exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X]$.

b) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\,x\,e^{x(1-x)-y} & \text{für } 0 \le x \le y\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte f_X der Randverteilung von X.

c) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 \le x \le y \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $E[XY]$.

Lösung:

a) Wir berechnen das erste und das zweite Moment von X.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{2}{\lambda} E[X] = \frac{2}{\lambda^2}\,. \end{aligned}$$

Die Varianz ist gegeben durch

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

b) Die Randdichte f_X bestimmt sich durch $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$, $x \in \mathbb{R}$. Für $x < 0$ ist $f(x,y) = 0$, also auch $f_X(x) = 0$, und für $x \geq 0$ gilt

$$f_X(x) = \int\limits_x^\infty 2\,x\,e^{x(1-x)-y}\,dy = 2\,x\,e^{x(1-x)} \int\limits_x^\infty e^{-y}\,dy = 2\,x\,e^{x(1-x)}(-e^{-y}\big|_x^\infty) = 2\,x\,e^{-x^2}.$$

Wir erhalten also $f_X(x) = \begin{cases} 2\,x\,e^{-x^2} & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

c) Wir rechnen

$$E[XY] = \int_0^2 \underbrace{\int_0^y \frac{1}{2}xy\ dx}_{=\frac{1}{4}x^2y\big|_0^y=\frac{1}{4}y^3}\ dy = \int_0^2 \frac{1}{4}y^3\ dy = \frac{1}{16}y^4\big|_0^2 = 1.$$

4. Welche der untenstehenden Aussagen ist **richtig**? Begründe deine Antwort.

a) Es gilt $P[X > t+s \mid X > s] = P[X > t]$ für alle $t, s \geq 0$, falls

1. $X \sim \mathcal{U}(a,b)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
3. $X \sim Exp(\lambda)$.

b) Sei $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$. Was gilt dann für $\Phi(-t)$?

1. $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.
2. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.
3. $\Phi(-t) = \Phi(t)$.

c) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Y eine Zufallsvariable, sodass $X + Y \sim \mathcal{N}(1,6)$. Berechne $E[Y]$.

1. $E[Y] = 0$.
2. $E[Y] = 2$.
3. $E[Y] = 1$.

d) Die Dichte einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} c + x & \text{falls } -\frac{c}{2} \leq x \leq 0, \\ c - x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{c}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Konstante c.

1. $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. $c = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

e) Wir betrachten die Verteilungsfunktion $F_X(t)$ für die Zufallsvariable X aus **d)**. Dann gilt:

1. $F_X(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2}$ für $t \leq 0$.
2. $F_X(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2}$ für $t \geq 0$.
3. Weder 1. noch 2. trifft zu.

f) Sei $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Was gilt dann für $\varphi(-t)$?

1. $\varphi(-t) = -\varphi(t)$.
2. $\varphi(-t) = 1 - \varphi(t)$.
3. $\varphi(-t) = \varphi(t)$.

Lösung:

a) 3. ist richtig, denn es gilt für $X \sim Exp(\lambda)$

$$P[X > t+s \mid X > s] = \frac{P[X > t+s]}{P[X > s]} = \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P[X > t].$$

b) 2. ist richtig. Mit der Substitution $s' = -s$ erhält man

$$\begin{aligned}\Phi(-t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-t} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}s'^2}ds' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s'^2}ds' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s'^2}ds' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}s'^2}ds' = 1 - \Phi(t).\end{aligned}$$

1. ist falsch, weil $\Phi > 0$, und 3. ist falsch, weil Φ strikt wachsend ist.

c) 3. ist richtig. Da $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, folgt $E[X] = 0$ und $Var(X) = 1$. Weiter gilt wegen $X + Y \sim \mathcal{N}(1,6)$, dass $E[X+Y] = 1$ und $Var(X+Y) = 6$. Wegen Linearität des Erwartungswertes ist

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 1.$$

Daraus folgt, dass $E[Y] = 1$. Weiter erhalten wir wegen der Unabhängigkeit

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1 + Var(Y) = 6.$$

Also ist $Var(Y) = 5$. Da $Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2$, folgt $E[Y^2] = 6$.

d) 1. ist richtig. Da $f_X(x)$ eine Dichte ist, muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned}1 &\overset{!}{=} \int_{-\frac{c}{2}}^{0}(c+x)\;dx + \int_{0}^{\frac{c}{2}}(c-x)\;dx = (cx + \frac{1}{2}x^2)\Big|_{-\frac{c}{2}}^{0} + (cx - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{\frac{c}{2}} \\ &= \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{8} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{8} = \frac{3}{4}c^2.\end{aligned}$$

(Alternativ kann man die Fläche unter der Funktion f auch elementargeometrisch bestimmen.) Es folgt $c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ und weil $f(x) \geq 0$ sein muss, folgt $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

e) *Möglichkeit 1:*
1. ist falsch, weil in diesem Fall $F_X(t) > 1$ wird für t negativ genug; 2. ist falsch, weil hier $F_X(t) < 0$ wird für t gross genug. 3. ist also richtig.
Möglichkeit 2:
Alternativ kann man die Verteilungsfunktion auch explizit berechnen. Aus **d)** wissen wir, dass $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Wir betrachten zuerst den Fall $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 0$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{t} \Big(\frac{2}{\sqrt{3}} + x\Big) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{t} \\ &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \Big(\frac{2}{\sqrt{3}} + x\Big) dx + \int_{0}^{t} \Big(\frac{2}{\sqrt{3}} - x\Big) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} + \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{t} \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist die Verteilungsfunktion $F_X(t)$ der Zufallsvariable X gegeben durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2} & \text{falls } -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 0, \\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2} & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 1 & \text{falls } t > \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

und wir erkennen, dass weder 1. noch 2. stimmt. Damit ist 3. richtig.
Möglichkeit 3:
Weil f_X links von $-c/2$ und rechts von $c/2$ Null ist, muss dort F_X konstant sein. Also sind 1. und 2. beide falsch und damit ist 3. richtig.

f) 3. ist richtig, da $t^2 = (-t)^2$.